Ralf Pfeifer

Schnelle Fehlerquadrate für Tabellenkalkulationen

Praktische Beispiele für die Gauß'sche Fehlerquadratmethode in Industrie und Forschung

SPORTVERLAG *Strauß*

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Pfeifer, Ralf
Schnelle Fehlerquadrate für Tabellenkalkulationen
Praktische Beispiele für die Gauß'sche
Fehlerquadratmethode in Industrie und Forschung
Sportverlag Strauß, Köln, 2, überarb. u. erw. Aufl. 2010
ISBN 978-3-939390-05-3

Hinweis: Die 1. Auflage erschien 2001 unter dem Titel
Effektive Messauswertung mit der Gauß'schen Fehlerquadratmethode
im Verlag SPORT und BUCH Strauß, Köln

Olympiaweg 1 - 50933 Köln
Tel. (02 21) 846 75 76
Fax (02 21) 846 75 77
e-Mail: info@sportverlag-strauss.de
http://www.sportverlag-strauss.de

Umschlag: Mike Hopf, Berlin
Titelfoto: © Ayvengo - Fotolia.com
Satz: Autorensatz

Herstellung: Digital Print Group, Nürnberg
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

1 Brauchen Sie dieses Buch?

Lieber Leser, vielen Dank, dass Ihre Neugier Sie schon bis zu dieser Seite gebracht hat. Meine bisherige Erfahrung zeigt, dass viele mögliche Anwender der hier vorgestellten Methode entweder nichts von den Möglichkeiten ahnen, die ihnen die Gauß'sche Fehlerquadratmethode bieten kann, oder dass ihnen die Arbeitsteilung in ihrem Labor, Entwicklungsabteilung oder die Aufgaben im Zusammenhang mit dem Qualitätsmanagement den Zugriff auf einen Spezialisten sichert, der mit Spezialprogrammen wie Mathematica, MatLab, Maple und anderen die Lösung ihres Problems übernimmt.

Anwendungsgebiete

Im industriellen Bereich kann Ihnen diese Methode bei der Ermittlung und Dokumentation von Prozessparametern in der Produktion handeln, wenn beispielsweise eine Formel den Zusammenhang beschreibt oder eine bessere Formel gefunden werden soll. Oder Sie vereinbaren mit Ihrem Kunden oder Lieferanten Abnahmekriterien für ein Produkt, wobei über eine Messung die Toleranz des Bauteils bestimmt werden soll[1]. Oder Sie entwickeln ein Steuergerät, welches ein mechanisches Bauteil für eine bestmögliche Steuerung simulieren muss[2].

Dazu kann der Einsatz ausgereifter Mathematik den Bedarf von Geld und Zeit reduzieren bzw. Projekte im Rahmen von Bachelor- und Masterarbeiten erst ermöglichen.

Spezialprogramme vs. Tabellenkalkulation

In der Praxis bleiben aber manchmal große Wünsche offen, wenn man den Spezialisten mit seinem Spezialprogramm braucht:

- Für jede Bearbeitung benötigen Sie ihn, und vermutlich ist er gerade in anderen wichtigen Projekten gebunden.

---

[1] Beispiel in Abschnitt 5.2 Gauß-Kreise in der Messtechnik (S. 101)

[2] Beispiel in Abschnitt 4.4 Tellerfeder (S. 70)

- Die Arbeitsergebnisse Ihres Spezialisten sind statische Präsentationen, Arbeitsblätter einer Tabellenkalkulation der Berichte, die nicht rechnen – also nur ein Schnappschuss aus der Vielzahl der für Sie interessanten Lösungen.
- Vielleicht möchten Sie spielerisch die Daten variieren, um die Wirkung der Stellschrauben in Ihrer Aufgabe kennenzulernen und weil Sie für die Aufgabe hinter der Berechnung eine verbesserte Lösung finden möchten, aber Ihr Spezialist hat für „Spielereien“ wenig Zeit.
- Die erforderliche Spezialsoftware ist zu teuer, um sie an die Arbeitsplätze zu bringen, an denen wiederholte Auswertungen durchgeführt werden könnten, und …
- …auch dem Kunden oder Lieferanten, fehlt die Software oder der Spezialist für eigene Kontrollen.

Was bekommen Sie hier?

Wenn Sie selbst Erfahrung mit Tabellenkalkulationen haben und sich sicher im Umgang mit Excel fühlen, ist es mit diesem Buch für Sie nur ein kleiner Schritt, Ihr Problem selbst zu lösen. Sie erstellen ein rechnendes Tabellenblatt welches sich auf eine anerkannte mathematischen Methode stützt. Ihr Problem lösen Sie mit dieser Anleitung oder –noch einfacher– mit der Adaption von einem der vielen, ausführlichen Beispiele der folgenden Kapitel.

Ein Naturwissenschaftler oder Ingenieur sollte anhand der hier dargestellten einheitlichen Lösungsschritte kein Problem haben und der spätere Nutzer Ihrer Tabelle arbeitet mit der ihm vertrauten Office-Software, die er kennt und die ohne zusätzliche Lizenzkosten an beliebig viele Anwender verteilt werden darf.

Mitarbeit erwünscht

Die Mitarbeit der Leser an diesem Buch (und zukünftiger Auflagen) ist ausdrücklich erwünscht. Fragen zum Thema, erkannte oder vermutete Fehler und Vorschläge für weitere Beispiele können Sie mir via Email zuschicken.

Auf `www.ArsTechnica.de` (s.u.) werden die Fragen und Errata im Rahmen eines FAQ behandelt und – bei entsprechendem Leserinteresse – in die nächste Auflage eingearbeitet.

Zu diesem Buch gibt es eine Datei im Format Excel 2000 (incl. der VBA-Programme) und eine Volltextsuche in Access 2000, die kostenlos aus dem Internet heruntergeladen werden können.

Haftung und Risiko

Dieses Buch wurde nach bestem Wissen und Gewissen erstellt. Dieses Thema ist sehr speziell, so dass ich bei der Kontrolle auf mich alleine gestellt war. Es könnten noch Fehler und Irrtümer enthalten sein, für die ich mich schon im Voraus entschuldigen möchte und über die ich auf meiner Webseite berichten werde, sobald ich davon erfahre.

Daneben ist die Gauß'sche Fehlerquadratmethode kein Verfahren, welches immer eine Lösung liefert, das Gauß-Newton-Verfahren könnte sogar mathematische Nebenlösungen finden, die unphysikalisch sind.

Ich schließe daher jede Form der Haftung aus und empfehle dieses Buch nur als Stütze Ihres Intellekts bei der Suche nach geeigneten Lösungen für spezielle Aufgabenstellungen.

Kontakt / Download

Wenn Sie Kontakt zu mir suchen, besuchen Sie meine Homepage `www.ArsTechnica.de`

Die Beispiele zum Buch, Errata, FAQ, Download gibt es auf meiner Webseite: `www.ArsTechnica.de/buch/gauss` (bitte Kleinschreibung nach dem ersten „/" beachten).

Danke …

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei meiner Korrekturleserin und Herz-Dame Christa sowie meinem Verleger Rudolf Strauß bedanken, der diesen Bestseller tapfer unter's Volk bringt.

2 Einführung

2.1 Hintergrund

Die Messung von physikalischen Größen bringt oft Probleme mit sich: Die Theorie macht klare Voraussagen und beschreibt die Zusammenhänge zwischen Ursache und Wirkung mit einer eleganten Gleichung, aber die Messungen liefern nicht so saubere Daten, wie die Theorie es vorhersagt.

Ein Grund hierfür sind kleine Messfehler, die ihrerseits ein großer Wirtschaftsfaktor sind, da unter der Aufsicht der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt[3] zahllose Eichämter, Hersteller und Institute von Bändigung dieser Fehler leben.

Daneben gibt es weitere Fehlerquellen, so sind viele Formeln in der technischen Anwendung vereinfacht oder nur empirisch und ohne kausalen Zusammenhang.

Doch wenn alle diese Probleme gelöst oder bewusst in Kauf genommen werden, bleibt zum Schluss einer Versuchsreihe die Auswertung der Messergebnisse. In der Praxis wird hierzu gerne die Methode der kleinsten Fehlerquadrate benutzt, die Carl-Friedrich Gauß[4] entwickelt hat.

Ziel dieser Einführung

Dies soll eine kleine Einführung in die Gauß'sche Fehlerquadratmethode sein. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Leser Ingenieure und Naturwissenschaftler sind, die ihre mathematischen Vorkenntnisse im Rahmen dieses Buches auffrischen können. Die Mathematik

---

[3] Gemäß dem Auftrag aus dem Grundgesetz (Art. 73 Abs. 4) hat der Bund die PTB dazu bestimmt. Details siehe www.ptb.de

[4] Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855, ab 1807 Professor für Mathematik und Direktor des Observatoriums Göttingen

wurde soweit möglich und sinnvoll auf den anwendbaren Teil beschränkt und ausführlich erklärt.

Die Anwendung der Gauß'schen Fehlerquadratmethode wird an Beispielen demonstriert, dazu soll auch ersichtlich werden, wie man mit Tabellenkalkulationen schnell und zuverlässig die gewünschten Lösungen erhält. Mit den richtigen Kenntnissen und einer selbsterstellten Tabellenvorlage ist es innerhalb weniger Minuten möglich, die Rohdaten regelmäßig wiederkehrender Aufgaben auszuwerten.

Diese Einführung steigt an dem Punkt ein, an dem die Phase der Modellfindung und der Versuch abgeschlossen sind, und es darum geht, die Rohdaten des Versuchs zu veredeln, so dass ein aussagekräftiges Ergebnis entsteht.

Was kann die Mathematik?

Zahlen machen Dinge vergleichbar. Die mathematischen Formeln, die solche Zahlen liefern, werden manchmal als besonders vertrauenswürdig betrachtet. Doch keine Methode kann schlechte Messungen in gute Ergebnisse verwandeln, das sollte schon beim Aufbau und den Messungen einer Versuchsreihe berücksichtigt werden. Es ist immer besser, Genauigkeitsverluste schon mit dem Versuchsaufbau *sicher* zu vermeiden, als sie nachträglich *vielleicht* herauszurechnen.

Nehmen wir dazu beispielsweise die Messung des Volumens von Glasperlen: Man könnte die Glasperlen in eine mit Wasser gefüllte breite Wanne legen (Bild 1 links) und aus dem Anstieg des Wasserspiegels (Skala Bild 1 Mitte) auf das Volumen der Glasperlen schließen.

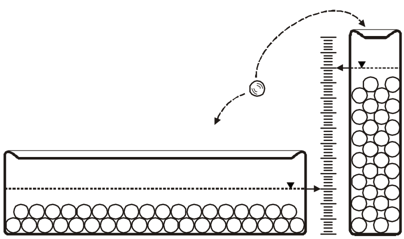

Bild 1: Volumenmessung in flüssigkeitsgefüllten Gefäßen

Der Nachteil ist, dass einige wenige Glasperlen den Wasserstand dem breiten, flachen Gefäß kaum messbar verändern würden. Wesentlich größere Änderungen des Wasserspiegels erhielte man, wenn man die Glasperlen in eine hohe, schmale Röhre schütten würde (Bild 1 rechts).

Wer trotzdem das flache, breite Gefäß statt des hohen, schmalen Gefäßes benutzt, verliert schon in der Messung viel Genauigkeit. Diese lässt sich durch die Mathematik nicht zurückgewinnen.

Korrelation und Kausalität

In der Statistik tauchen zwei ähnlich klingende Begriffe immer wieder auf: Korrelation und Kausalität.

Eine Korrelation liegt vor, wenn zwei Ereignisse sich ähnlich entwickeln, eine Kausalität verlangt zusätzlich, dass sie sich nicht zufällig, sondern auf Grund eines tieferen Zusammenhangs so entwickeln.

Ein schönes Beispiel für eine Korrelation liefert die Geburtenstatistik, aus der man mancherorts ableiten kann, dass sich die Geburtenrate mit der Zahl der Störche entwickelt – dies ist eine Korrelation. Es besteht aber nach aller Lebenserfahrung keine Kausalität zu den Fortpflanzungsgewohnheiten der Menschen.

Eine andere Statistik behauptet den Zusammenhang zwischen dem Weizenpreis und der Weizenpollenallergie: Im mittleren Westen der USA soll mit fallendem Weizenpreis die Anzahl der Allergiefälle zunehmen. Hier besteht tatsächlich eine Kausalität, die allerdings nicht direkt zwischen Preis und Allergie besteht, sondern über die Menge des Weizens, die einerseits zu vielen Pollen führt und andererseits ein Überangebot auf dem Markt mit entsprechend niedrigen Preisen[5] verursacht.

Das nächste Beispiel in dieser Reihe ist leicht mit der Gauß'schen Fehlerquadratmethode zu berechnen und zeigt doch, wie schnell man in die Korrelations-Falle tappen kann.

[5] Vorgestellt von Walter Krämer in 'So lügt man mit Statistik'

Der Ringelmann-Effekt

Angeregt von Studien des französischen Ingenieurs Maximilien Ringelmann haben Psychologen mit Modellversuchen im Tauziehen herausgefunden, dass die Leistung von Personen in Gruppen kleiner ist, als die Summe der Leistungen, die jede Person für sich alleine erbringen würde. Wenn ein einzelner Sportler 100% Einsatz bringt, bringen zwei Sportler im Team nicht etwa 2 × 100%, sondern nur etwa 2 × 93%.

Einige Zahlen[6] zum Ringelmann-Effekt sind in Bild 2 dargestellt:

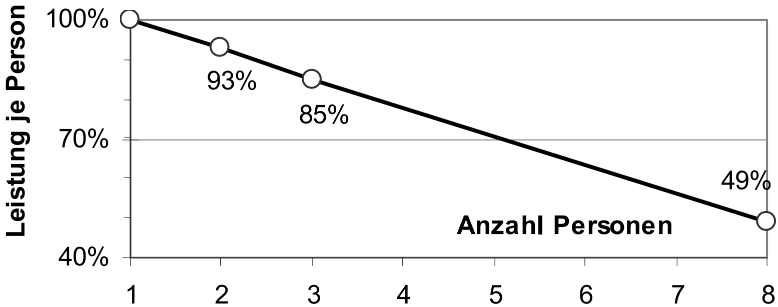

Bild 2: Zahlen zum Ringelmann-Effekt

Der visuelle Trend zeigt eine degressiv-lineare Abhängigkeit der Leistung von der Anzahl der Gruppenmitglieder. Eine lineare Regression liefert die Koeffizienten:

$$P(n) = 100 - 7{,}3 \cdot (n - 1)$$

P Leistung je Gruppenmitglied in %
n Anzahl der Gruppenmitglieder

Einsetzen zeigt, dass die Formel tatsächlich die bekannten Werte außerordentlich gut wiedergibt.

6 Vgl. Michael Kent (Hrsg.), Wörterbuch der Sportwissenschaft und Sportmedizin, Stichwort ‘Ringelmann-Effekt’. Laut Wikipedia war Ringelmann selbst als Ingenieur eher technisch am Problem interessiert und seine Versuche zum Ziehen von Lasten schlossen Pferde, Ochsen und Menschen ein. In den 1970er Jahren wurde seine Versuche am Beispiel des Tauziehens weiter untersucht.

Bei einem tieferen Blick zeigen sich dann aber einige bedenkenswerte Punkte, die mit der normalen Lebenserfahrung nicht vereinbar sind:

- Bei $n = 15$ Mitgliedern würde die relative Leistung $P(15)$ des Einzelnen unter 0% sinken. 15 Mitspieler beim Tauziehen sollten immer noch eine positive Zugkraft auf das Seil ausüben.

  Es muss also, egal welche Formel den Zusammenhang wirklich beschreibt, folgende Nebenbedingungen gelten:

  $$P(n) > 0$$

- Nach aller Erfahrung ist die Kraft am Seil um so größer, je mehr Mitglieder eine Mannschaft hat. Umgekehrt kann bei zunächst gleichstarken Mannschaften eine Mannschaft nicht stärker werden, falls ein Teilnehmer geht. Es muss also eine weitere Nebenbedingung gelten:

  $$n \cdot P(n) < (n + 1) \cdot P(n + 1)$$

  In der ersten Formel ist diese Bedingung nur für $n = 1 \ldots 6$ erfüllt.

Der wirkliche Schwachpunkt der Formel ist allerdings der, dass ich sie nur auf Grund eines visuellen Eindrucks (nämlich der Geraden in Bild 2) angenommen habe. Es gibt keine wissenschaftliche Begründung für die Wahl. Ich habe (natürlich nur zu didaktischen Zwecken) aus einer Korrelation verschiedener Punkte eine Formel konstruiert, und Ihnen diese als kausale Beziehung suggeriert.

Titius-Bode-Reihe

Ein anderes Beispiel für eine Korrelation, der bis heute keine Kausalität zugeordnet werden konnte, ist die 1772 publizierte Titius-Bode-Reihe[7], welche eine mathematische Beziehung zwischen den Planetenabständen beschreibt:

[7] Nach den Astronomen Johann Daniel Titius (1729-1796) und Johann Elert Bode (1747-1826) benannt. Die von Titius 1766 entdeckte Formel wurde 1772 von Bode veröffentlicht.

$$A = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n \qquad \text{Gl. 1}$$

A	Abstand eines Planeten zur Sonne, gemessen in Astronomischen Einheiten [AE], dem mittleren Abstand Erde-Sonne, 1 AE = 149,6 Mio. km
n	Wert aus Tabelle 1, der für jeden Planeten einzusetzen ist

In Gl. 1 ist für Merkur n = $-\infty$ einzusetzen, damit $2^{-\infty} = 0$ wird.

Der Wert n der eleganten Formel folgt der Reihe in Tabelle 1, die ebenfalls eine gewisse mathematische Schönheit besitzt. Die 1766 entdeckte und 1772 publizierte Formel erfuhr eine glanzvolle Bestätigung, als Wilhelm Herschel den Uranus 1781 entdeckte. Dass Neptun nicht in die Reihe passt, fiel erst 1846 auf, als der Berliner Astronom Galle nach mathematischen Berechnungen von Le Verrier den Neptun fand.

Bis heute wurde keine physikalische Gesetzmäßigkeit entdeckt, auf der die Titius-Bode-Reihe beruhen könnte, aber lange nährte sie Spekulationen. Weil die Formel für $n = 3$ eine Planetenbahn an der Stelle des Planetoidengürtels vorhersagt, wird außerhalb der Wissenschaft gerne ein Planet zwischen Mars und Jupiter behauptet, den Außerirdische zerstört haben sollen, so dass dort heute dessen Trümmer den Planetoidengürtel bilden. Obwohl Gl. 1 Neptun ignoriert, wurde mit der Formel Transpluto vorhergesagt, 2003 gefunden und 2005 von der Wissenschaft als Zwergplanet Eris eingestuft.

Planet	n
Merkur	-∞
Venus	0
Erde	1
Mars	2
(Planetoidengürtel)	3
Jupiter	4
Saturn	5
Uranus	6
Neptun	–
Pluto	7
Eris	8

Tabelle 1: Werte der Titius-Bode-Reihe für bekannte Himmelskörper

Fazit

Die Gauß'sche Fehlerquadratmethode ist ein Werkzeug, mit dem Korrelationen sichtbar gemacht und sogar erzwungen werden können. Das alleine gibt aber keine Auskunft, ob auch eine Kausalität besteht. Für einen Ingenieur ist dies kein Mangel, solange ihm eine

4.2 Radioaktiver Zerfall

Die folgende Gleichung gibt an, wie viel Substanz von einem radioaktiven Element im Laufe der Zeit noch übrig ist:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad \text{Gl. 4}$$

$m(t)$	Masse verbliebener (unzerfallener) Atomkerne nach der Zeit t in [kg]
m_0	Masse der Kerne zu Beginn (bei $t = 0$) in [kg]
λ	Zerfallskonstante in [1/s]
t	Zeit, die seit Beginn verstrichen ist, in [s]

Da sich der Zerfall von außen kaum[19] beeinflussen lässt, schwindet die Masse des ursprünglichen Elements dahin und verwandelt sich in ein oder mehrere andere Elemente.

Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass es ein Verfahren gibt, um zu jedem Zeitpunkt die Masse des übriggebliebenen radioaktiven Materials zu bestimmen.

Durch einige Messungen soll die radioaktive Zerfallskonstante λ ermittelt werden. Das Problem lässt sich relativ einfach lösen, wenn es gelingt, zum Zeitpunkt $t = 0$ eine gewisse Menge radioaktives Material in reiner Form zusammenzubekommen.

Genaugenommen ist die Information über die Masse der Kerne m_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ ohne Bedeutung, denn die Eigenschaften der Zerfallskurve werden von der Differentialgleichung beschrieben und die Anfangsmenge wird erst für die Vorhersage einer Restmenge nach einer vorgegebenen Zeit benötigt – danach war in dieser Aufgabe nicht gefragt. Also wird die Anfangsmenge m_0 zwar mitberechnet, aber das Ergebnis wird später nicht weiter verwendet.

[19] Anders als biologische Prozesse kann man den Zerfall nicht z.B. einfach einfrieren. Andererseits wird in Kernkraftwerken und -waffen der Zerfall gezielt beschleunigt.

Formalismus

Durch Logarithmieren von Gl. 4 kann das gesamte Problem linearisiert werden:

$$\ln m(t) = \ln m_0 - \lambda \cdot t$$

Diese Gleichung hat offensichtlich die Form einer Geraden, die Lösung lässt sich also schon mit Hilfe der Standardfunktion L.R. eines Taschenrechners lösen. Dennoch soll hier das Modell der Linearisierung fortgeführt werden, so dass die Gleichung für das Gauß-Verfahren entsteht:

$$\underbrace{\ln m_i}_{u} = \underbrace{1}_{z_0} \cdot \underbrace{\ln m_0}_{a_0} + \underbrace{(-t_i)}_{z_1} \cdot \underbrace{\lambda}_{a_1} \qquad \text{Gl. 5}$$

Die Messergebnisse werden zu verschiedenen Matrizen zusammengefasst:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 & -t_1 \\ 1 & -t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -t_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \ln m_1 \\ \ln m_2 \\ \vdots \\ \ln m_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \ln m_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich ein Gleichungssystem in Matrixschreibweise formulieren:

$$[\mathbf{z}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{z}] \cdot \mathbf{a} = \mathbf{z}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$$

Berechnungsbeispiel

Die Daten aus Tabelle 16 werden übernommen und das Tabellenblatt sieht so aus:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		*u*		*Matrix z*										*Berechnet*
2	s	F_{Nom}		s^3	s^2	s	1		*Matrix* $z^T \cdot z$					F'_{Nom}
3	0,00 mm	0 N		0,0	0,0	0,0	1		3056,2	1003,3	338,5	118,9		0 N
4	0,34 mm	794 N		0,0	0,1	0,3	1		1003,3	338,5	118,9	44,5		794 N
5	0,68 mm	1.379 N		0,3	0,5	0,7	1		338,5	118,9	44,5	18,7		1.379 N
6	1,02 mm	1.777 N		1,1	1,0	1,0	1		118,9	44,5	18,7	11,0		1.777 N
7	1,36 mm	2.013 N		2,5	1,8	1,4	1							2.013 N
8	1,70 mm	2.110 N		4,9	2,9	1,7	1		$z^T \cdot u$	*Lösung*				2.110 N
9	2,04 mm	2.090 N		8,5	4,2	2,0	1		194813,9	98,6	$= a_3$			2.090 N
10	2,38 mm	1.977 N		13,5	5,7	2,4	1		75429,0	-1005,7	$= a_2$			1.977 N
11	2,72 mm	1.795 N		20,1	7,4	2,7	1		32455,7	2665,6	$= a_1$			1.795 N
12	3,06 mm	1.566 N		28,7	9,4	3,1	1		16815,0	0,07	$= a_0$			1.566 N
13	3,40 mm	1.314 N		39,3	11,6	3,4	1		*det* =	15305				1.314 N
14									*R* =	0,46				
15									*cond* =	53390				

Tabelle 17: Kubische Gleichung mit Konstante a_0

Zur Berechnung mit der Tabellenkalkulation geht man in folgenden Schritten vor:

(1) Zunächst werden die Daten wie dargestellt in die Bereiche A3:B13 eingegeben.

(2) Spalte D3 mit `=A3^3`, der Formel für $s^3 = z_3$, füllen und in die Zellen D4:D13 kopieren.

(3) Spalte E3 mit `=A3^2`, der Formel für $s^2 = z_2$, füllen und in die Zellen E4:E13 kopieren.

(4) Spalte F3 mit `=A3`, der Formel für $s = z_1$, füllen und in die Zellen F4:F13 kopieren.

(5) Spalte G3 mit `1`, der Formel für z_0, füllen und in die Zellen G4:G13 kopieren.

(17) Determinante des Gleichungssystems prüfen: In Zelle O17 die Zellformel '`=MDET(N11:R15)`' eintragen.

(18) Konditionszahl bestimmen: In Zelle O19 die Formel '`=COND(N11:R15)`' eintragen.

Wie gut ist das Ergebnis?

Bild 30 zeigt die Asymptoten und die berechnete Schwingung aufgrund der in Tabelle 39 berechneten Parameter (Startwerte). Trotz der geringen Anzahl von Messwerten macht das Ergebnis einen guten Eindruck. Berücksichtigt man, dass die große Zahl von 5 Parametern zu bestimmen war, ist das Residuum klein und die Konditionszahl weist auf ein gutmütiges Problem hin.

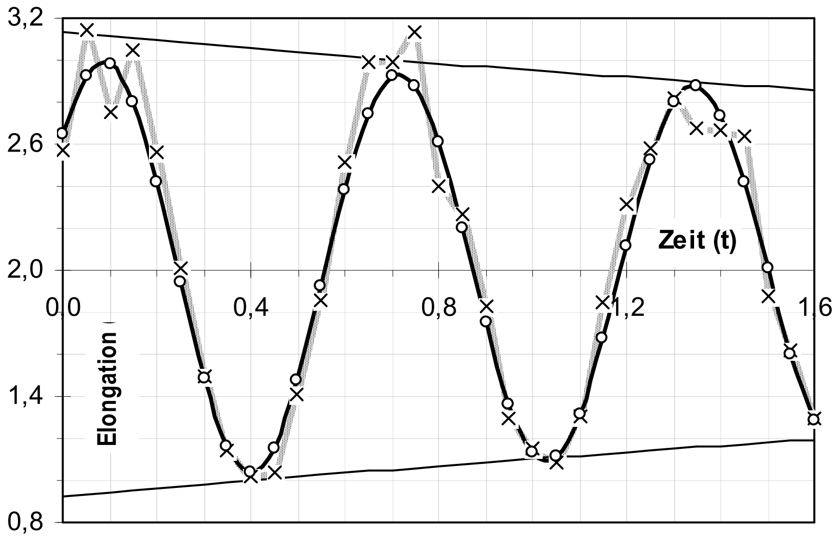

Bild 30: Vergleich der gemessenen (×) und berechneten Werte (–o–)

triebssystem[35] oder Funktionen des Prozessors kommen ebenfalls als Fehlerursache in Betracht. Man erinnere sich beispielsweise an den bereits zu Beginn von Kapitel ‘6 Qualität der Ergebnisse’ (S. 186) erwähnten Bug im mathematischen Koprozessor[36] (FPU) des Pentium I, an den Excel 97 Bug[37], bei dem heimlich Zahlen in Texte umgewandelt wurden und dadurch bei Berechnungen nicht mehr berücksichtigt wurden oder an diverse Viren, die unauffällig einzelne Ziffern verändern.

Ich habe trotzdem diese Makros ausgearbeitet, denn ich habe die Erfahrung gemacht, dass Fehler in der Software systematisch auftreten und leichter zu erkennen sind, als Flüchtigkeitsfehler in der Handarbeit, die jedes Mal anders ausfallen können.

Die Programme wurden nach bestem Wissen und Gewissen erstellt, dennoch besteht die Gefahr, dass auch mir Fehler unterlaufen sind. Für eine korrekte Funktion kann ich daher leider keine Garantie übernehmen. Wenn Sie meine Makros verwenden, prüfen Sie bitte nach der Berechnung kritisch alle Ergebnisse auf Plausibilität, und wenn Ihnen Ungereimtheiten auffallen, dann informieren Sie mich bitte.

Das Add-in ‘GaussMakro.xla’ installieren

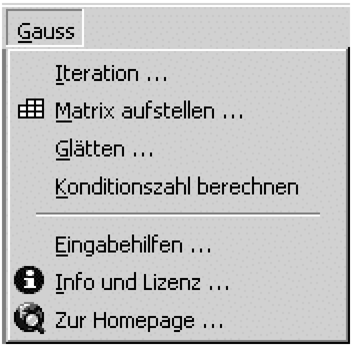

Bild 39: Neue Menüleiste

Sie können die Datei ‘GaussMakro.xla’ in ein beliebiges Verzeichnis speichern, allerdings werden Add-ins für Excel 2000 bevorzugt im Verzeichnis

C:\Dokumente und Einstellungen\[*Benutzer*]\ Anwendungsdaten\Microsoft\AddIns\ abgelegt.

Dann müssen Sie es über den Add-in Manager einbinden:

---

35 Nach einem internen Memo von Microsoft sollen zum Zeitpunkt der Markteinführung Windows 2000 noch 63000 Fehler im Betriebssystem gesteckt haben. Aus: c’t Heft 12/2001 ‘Windows 2000: Rund um das Service Pack 2’ von Peter Siering

36 c’t 14/97, Beitrag ‘Bug-Wahn’ und ‘Prozessorgeflüster’, beide von Andreas Stiller

37 c’t 1/99, Beitrag ‘Zweiter Office Patch’ von Alexandra von Cube und 1/98, Hotline-Beitrag ‘Office 97 Dialoge durcheinander’ von Dieter Brors

(1) Klicken Sie im Menü ‘Extras’ auf ‘Add-ins-Manager…’

(2) Klicken Sie auf die Schaltfläche ‘Durchsuchen…’

(3) Wählen Sie ‘GaussMakro.xla’ aus und klicken Sie auf die Schaltfläche ‘OK’

(4) Sie sehen nun im Listenfeld ‘Verfügbare Add-ins’ ein neues Add-in mit dem Namen ‘Gauss Fehler’. Klicken Sie auf das Kontrollkästchen vor dem Namen des Add-ins.

(5) Klicken Sie auf die Schaltfläche ‘OK’

Das Add-in installiert nun in der Menüleiste von Excel den neuen Eintrag ‘Gauss’ mit mehreren Menüpunkten (siehe Bild 39).

C.1 Funktionen der Menüleiste

Einige Eingabefelder erlauben es, bei geöffnetem Dialogfeld einen Bereich in der Tabelle zu markieren. Klicken Sie dazu erst in das Eingabefeld oder auf die Schaltfläche rechts vom Eingabefeld (mit den …) und dann in die Tabelle.

Dazu besitzen viele dieser Eingabefelder eine besondere, programmierte Komfortfunktion: Wenn Sie vor dem Öffnen des Formulars nur eine Zeile markiert haben, erweitert das Makro die Markierung automatisch bis ganz unten – jedenfalls bis zur ersten Leerzelle, und wenn Sie einen Bereich markieren, wird der ebenfalls übernommen. Das Formular erkennt markierte Bereiche beim Öffnen und erspart Ihnen so Arbeit.

Iteration …

Unter diesem Menüpunkt steht ein Formular zur Verfügung, welches speziell die Berechnungen des Gauß-Newton-Verfahrens ganz erheblich vereinfacht, indem es die Iteration automatisch durchführt und eine Reihe von Prüfungen automatisch vornimmt.

In der ersten Auflage stand dieses wichtige Werkzeug nur als einfaches Makro zur Verfügung.

Hinweis: Vor der Berechnung sollten einige sinnvolle Startwerte bestimmt und in den Quellbereich eingetragen werden, denn auch dieses Formular kann die grundsätzlichen Probleme einer Iteration nicht lösen.

Bei jedem Iterationsschritt muss außerdem das gesamte Tabellenblatt neu berechnet werden. Die Laufzeit hängt daher stark vom Umfang der Quelldaten und der Anzahl der Koeffizienten ab.

Die Felder bedeuten Folgendes:

Quelle: Korrekturen, Abweichungen Korrekturen für das Gauß-Newton Verfahren, die von den Koeffizienten abgezogen werden.

Ziel: Koeffizienten Koeffizienten, von denen die Korrekturen abgezogen werden sollen.

Dämpfungsfaktor Immer wieder stellt sich das Problem, dass keine guten Schätzwerte vorliegen und das Gauß-Newton-Verfahren nicht konvergiert. Eine Möglichkeit, hier Abhilfe zu schaffen, ist ein 'Dämpfungsfaktor', der verhindert, dass die Korrekturen in voller Größe auf die Koeffizienten angewendet werden. Trägt man in das Feld Dämpfungsfaktor einen Wert von 100 ein, so bewirkt dieser, dass die Korrekturen durch 100 geteilt werden (daher steht auch eine `1/` vor dem Feld), bevor sie von den Koeffizienten abgezogen werden.

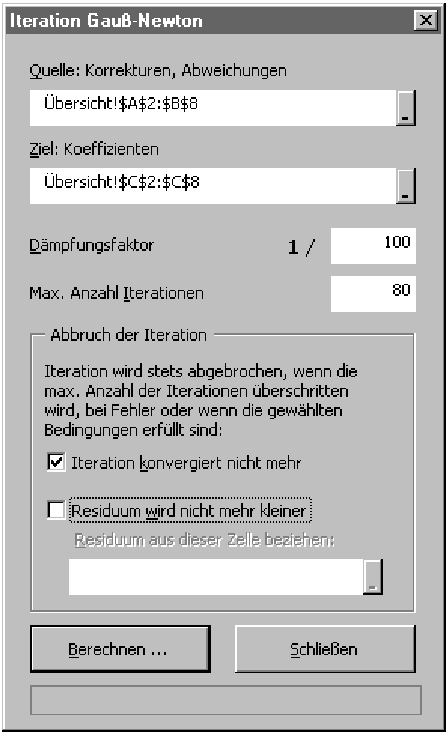

Bild 40: Formular zur Iteration

Max. Anzahl Iterationen Damit die Iteration nicht in einer Endlosschleife hängen bleibt, wird sie nach der hier vorgegebenen Anzahl von Iterationsschritten angehalten, sofern die Iteration nicht aus anderen Gründen (Lösung gefunden, Fehler) angehalten wurde.

Abbruch der Iteration Die Iteration wird immer abgebrochen, wenn die in Feld 'Max. Anzahl Iterationen' festgelegte Zahl von Iterationen erreicht wurde, oder wenn ein Fehler die Ausführung unterbricht (z.B. Koeffizienten führen dazu, dass eine Division durch Null ausgeführt werden soll). Es gibt jedoch zusätzliche Kriterien, die zum Abbruch der Iteration genutzt werden können:

Iteration konvergiert nicht mehr Hier wird geprüft, ob sich die Koeffizienten noch ändern und ob sich die Summe der Quadrate der Korrekturen verkleinert.

Residuum wird nicht mehr kleiner Die Summe der Quadrate der Residuen gibt an, wie gut die berechnete Kurve zu den tatsächlich gemessenen Werten passt. Solange diese Summe kleiner wird, läuft die Berechnung in die richtige Richtung. Dazu ist es aber erforderlich, dass man auf dem Tabellenblatt ein Feld angibt, in dem die Summe der Residuen berechnet wird. Im Buch wird dies in jedem Beispiel vorgeführt, das entsprechende Feld, das den Wert von *R* enthält, ist in das dem Text …

Residuum aus dieser Zelle beziehen …folgende Feld einzutragen. Dieses Feld ist nur aktiviert, wenn das Kontrollkästchen '`Residuum wird nicht mehr kleiner`' angeklickt ist.

Berechnen Beginnt die Iteration

Schließen Schließt das Dialogfeld

Info Zeigt eine Info-Seite

Internet Verzweigt zur Homepage www.ArsTechnica.de

Am unteren Rand enthält das Formular eine Statuszeile, welche die aktuellen Meldungen des Iterationsprozesses ausgibt.

Das Programm hinter dem Formular erledigt bei jedem Aufruf folgende Schritte:

(1) Einen Iterationsschritt durchführen, bei dem neue Korrekturen berechnet und von den Koeffizienten abgezogen werden.

(2) Prüfen, ob sich Fehler eingestellt haben: Es kann sein, dass durch die Iteration die Berechnungen auf dem Tabellenblatt zu einem Fehler führen, weil irgendwo eine negative Zahl die Wurzel oder den Logarithmus verdirbt (rein mathematisch wäre das kein Problem, wenn Excel auf komplexe Rechnung umschalten könnte).

(3) Falls das Kontrollkästchen '`Iteration konvergiert nicht mehr`' markiert wurde, prüft das Programm, ob sich die Korrekturen verkleinert haben. Dazu wird die Summe der Quadrate der Korrekturen vor und nach dem Iterationsschritt verglichen. Wenn sich die Korrekturen verkleinern, ist dies ein Zeichen, dass das Verfahren konvergiert. Falls nicht, wird die Iteration abgebrochen.

(4) Falls das Kontrollkästchen '`Residuum wird nicht mehr kleiner`' markiert wurde, prüft das Programm, ob sich das Residuum verkleinert hat. Falls nicht, wird die Iteration abgebrochen.

(5) Spätestens dann, wenn die vorgegebene maximale Zahl von Iterationsschritten überschritten wurde, wird die Iteration beendet.

Wenn die Iteration wegen (2) abgebrochen wird, speichert das Programm die letzten Koeffizienten auf jeden Fall zurück, bevor die Iteration beendet wird. Bei (3) oder (4) fragt das Programm, ob nicht wenigstens ein einzelner Iterationsschritt gemacht werden soll.

Es ist durchaus möglich und sinnvoll, die Iteration mehrfach manuell zu starten. Dabei wird immer mindestens ein Iterationsschritt durchgeführt.

Matrizen aufstellen

Das Aufstellen der Matrizen wurde hier ausführlich beschrieben, und trotzdem ist es manchmal langwierig und fehlerträchtig. Ein Formular vereinfacht die Erstellung der Matrizen, wenn man die Bereiche angibt, aus welchen sich die Matrix ihre Informationen holen soll. Da die Matrizen bei linearen, linearisierbaren und nichtlinearen (Gauß-Newton) Problemen jeweils die gleiche Struktur haben, kann das Formular in allen Fällen verwendet werden.

Spalte für Koeffizienten Geben Sie hier den Bereich für die x-Werte (linear) oder die z-Werte (linearisierbar) oder die Ableitungen $\partial r/\partial\ldots$ (Gauß-Newton) ein.

Spalte für Ergebnis Geben Sie hier den Bereich für die y-Werte (linear) oder u-Werte (linearisierbar) oder die Residuen r (Gauß-Newton) ein.

Ausgabe Lösung Geben Sie den freien Zellbereich auf dem Tabellenblatt an, auf dem die Lösungen ausgegeben werden sollen. Es reicht, wenn Sie die obere linke Ecke des gewünschten Bereichs anklicken.

Ausgabeart Wählen Sie in diesem Optionsfeld, wie die Lösungen ausgegeben werden sollen:

Alle Matrizen ausgeben Gibt Koeffizientenmatrix, Spalten- und Lösungsvektor aus. Nur mit dieser Option können Determinante und Konditionszahl überprüft werden.

Nur Lösungsvektor ausgeben als Spalte Gibt die Lösungen aus und ordnet sie als einzelne Spalte an.

Nur Lösungsvektor ausgeben als Zeile Gibt die Lösungen aus und ordnet sie als einzelne Spalte an.

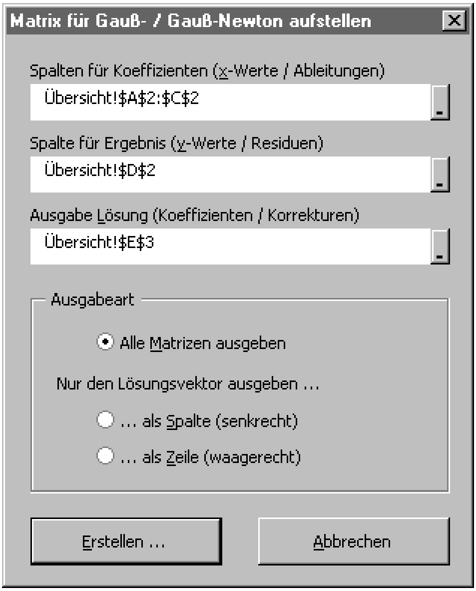

Bild 41: Formular zum Aufstellen der Matrizen

Erstellen Erstellt die Matrix. Danach wird das Dialogfeld automatisch geschlossen.

Abbrechen Schließt das Dialogfeld ohne weitere Aktionen.

Info Zeigt eine Info-Seite.

Internet Verzweigt zur Homepage www.ArsTechnica.de

Glätten

Dieses Formular soll die in 4.6 ‘Glättung mit Polynomen’ (S. 85) vorgestellte Glättung von Messreihen unterstützen. Ist vor dem Aufruf des Formulars im Tabellenblatt ein Bereich markiert, werden diese Markierungen als Vorschlag in das Formular übernommen.

x-Werte Reihe 1 Hier wird der Bereich der x-Werte eingegeben, der nur eine Spalte umfassen darf. Am Beispiel von Tabelle 22 wären das die Zellen A3:A21.

y-Werte Reihe 1 Hier wird der Bereich der y-Werte eingegeben, der nur eine Spalte umfassen darf. Am Beispiel von Tabelle 22 wären das die Zellen B3:B21.

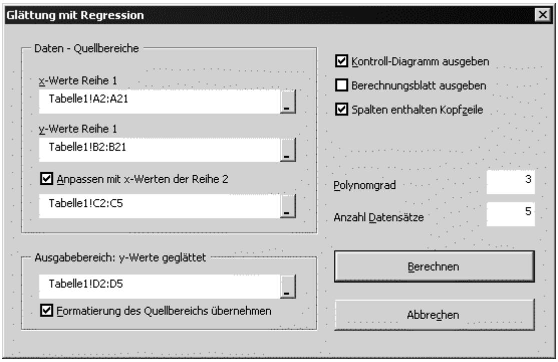

Bild 42: Formular Glättung

Anpassen mit x-Werten der Reihe 2 (optional) Wird dieses Kontrollkästchen aktiviert, erscheint darunter ein Eingabefeld für einen weiteren Bereich. Hilfreich ist dies, wenn die Glättung für andere x-Werte als in Spalte 1 berechnet werden soll. Sind beispielsweise die x-Werte in Spalte 1 für x = 1, 3, 5, 7, usw. gegeben und sollen für x = 2, 4, 6, 8, … berechnet werden, so legt man eine zweite x-Spalte mit 2, 4, 6, 8, …im Tabellenblatt an und trägt im Formular den Bereich der 2. x-Spalte unterhalb des Kontrollkästchens ein.

Die Anzahl der x-Werte in der 2. Reihe muss nicht gleich der Anzahl der x-Werte/y-Werte in Reihe 1 sein.

Ausgabebereich: y-Werte geglättet Der Bereich, in den die geglätteten y-Werte ausgegeben werden sollen. Diese y-Werte passen zu den x-

Werten der Datenreihe 1, oder falls die Option ‘Anpassen mit x-Werten der 2. Reihe’ aktiviert wurde, zu den x-Werten der Datenreihe 2. Der Bereich muss entweder die gleiche Größe wie die x-Werte der Reihe 1 haben oder, falls aktiviert, die gleiche Größe wie die x-Werte der Reihe 2.

Kontrolldiagramm ausgeben Erstellt ein Diagramm, welches die ‘x-Werte Reihe 1’/‘y-Werte Reihe 1’ als Linie zeigt und, je nachdem, ob die Option ‘Anpassen mit x-Werten der Reihe 2’ aktiviert ist, eine zweite Linie, die entweder ‘x-Werte Reihe 1’/‘y-Werte geglättet’ oder ‘x-Werte Reihe 2’/‘y-Werte geglättet’ zeigt.

Berechnungsblatt ausgeben Gibt zusätzlich die komplette Zwischenberechnung auf einem eigenen Tabellenblatt aus.

Spalten enthalten Kopfzeile Wenn die Daten eine Kopfzeile enthalten. Wichtig, wenn das Kontrolldiagramm ausgegeben werden soll. Wenn das Formular beim Öffnen einen markierten Bereich erkennt, wird diese Einstellung mit einem automatischen Vorschlag gesetzt.

Wenn diese Option gewählt ist, muss auch der Ausgabebereich und, falls gewählt, der Bereich der x-Werte der Reihe 2 eine Kopfzeile berücksichtigen!

Polynomgrad Grad des Anpassungspolynoms, der kleinste Grad ist 1, im Beispiel 4.6 Glättung mit Polynomen war es 3 für ein kubisches Polynom.

Anzahl Datensätze Anzahl der Datensätze, die für die Anpassung benötigt werden. Diese Zahl muss größer als der Polynomgrad sein. Wenn genau ein Datensatz mehr verwendet wird, als dem Polynomgrad entspricht, wird eine Interpolation durchgeführt. Eine Regression erfolgt erst, wenn die Anzahl der Datensätze mindestens um 2 größer ist, als der Polynomgrad. Die Anzahl der Datensätze darf außerdem die Anzahl der Zeilen der x-Werte in Reihe 1 bzw. Reihe 2 (falls aktiviert) nicht überschreiten.

E Stichwortverzeichnis

Eine Volltextsuche und ein vollständiges Stichwortverzeichnis stehen im Internet unter www.ArsTechnica.de/buch/gauss kostenlos zur Verfügung.